Développement : L'exponentielle est un homéomorphisme.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématique.

Énoncé :

L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

On rappelle les théorèmes avant :

Proposition 1 : Soient $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

En effet, pour $N > 0$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(P^{-1}AP)^n = P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n\right)P$$

Comme l'application $B \mapsto P^{-1}BP$ est continue, on obtient l'égalité annoncée en passant à la limite en $N \mapsto +\infty$

Proposition 2 : Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $|||S|||_2 = \rho(S)$.

Démonstration D'après le théorème spectral, il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de S, qui sont réelles car S est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $(x_1, ..., x_n)$ ses coordonnées dans cette base. On a

$$\|Sx\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(S)^2\|x\|^2$$

D'où $|||S|||_2 \leq \rho(S)$. Pour obtenir l'égalité inverse, il suffit de considérer $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S telle que $|\lambda| = \rho(S)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a alors $\|Sx\|_2 = |\lambda|\|x\|_2$, d'où $\rho(S) \leq \|S\|_2$. $\square$

Résolution :

Commençons par montrer que l'application est bien définie : soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. D'après le théorème spectral, il existe des matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $S = PDP^{-1}$. On a alors

$$\exp(S) = P\exp(D)P^{-1}$$

Comme $P^{-1} = {}^tP$, on en déduit que $\exp(S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car les coefficients diagonaux sont par conséquent strictement positifs. Comme $P \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(S) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

> Car on a que une matrice symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Montrons que exp est surjective : Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$ avec $\mu_i > 0$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$. On pose alors $U = P\mathrm{diag}(\ln(\mu_1), ..., \ln(\mu_n))P^{-1}$ qui vérifie bien $\exp(U) = S$. De plus, comme $P \in O_n(\mathbb{R})$, on a que U est aussi symétrique, donc $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application est donc bien surjective.

Montrons que exp est injective : soient $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques telles que $\exp(S) = \exp(S')$. Par le théorème spectrale, S et S' sont diagonalisables et il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$, avec $S = PDP^{-1}$ et $S' = QD'Q^{-1}$ telle que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$.
On pose alors $L \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange défini par $L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ et $L(e^{\mu_i}) = \mu_i$ pour tout i. Ce polynôme est bien défini car si $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ pour un certain couple (i, j), on a $\lambda_i = \mu_i$. On a donc

$$L(\exp(S)) = L(P\exp(D)P^{-1}) = PL(\exp(D))P^{-1} = PDP^{-1} = S$$

De la même manière, on montre que $L(\exp(S')) = S'$, d'où $S = S'$ car on a supposé que $\exp(S) = \exp(S')$, ce qui prouve que exp est injective.

Montrons que exp est un homéomorphisme : la fonction est continue et bijective, il reste donc à montrer que son inverse est continue. Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme on a montré la bijection, il existe bien une suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B_k) = A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons que cette suite (B_k) converge vers $B = \exp^{-1}(A)$.
Supposons que la suite (B_k) ne soit pas bornée (pour la norme subordonné).
On peut donc extraire une sous-suite de (B_k) telle que $\rho(B_{\varphi(k)}) \to +\infty$. Quitte à extraire, il existe alors une suite de valeurs propres réelles (λ_k) telle que $|\lambda_k| \to +\infty$. De même, on peut supposer que $\lambda_k \to +/-\infty$.
Si c'est vers $+\infty$, alors $\exp(\lambda_k) \to +\infty$ et comme $\exp(\lambda_k)$ est une valeur propre de $A_k = \exp(B_k)$, on a que $\rho(A_k) \to +\infty$ ce qui est impossible car la suite (A_k) converge vers A.
Si c'est vers $-\infty$, alors $\exp(-\lambda_k) \to +\infty$. Or $\exp(-\lambda_k)$ est une valeur propre de $\exp(-B_k)$. Or la suite $(A_k)^{-1} = exp(B_k)^{-1} = exp(-B_k)$ converge vers $A^{-1} = \exp(-B)$ car l'inversion est continue. C'est donc tout autant impossible, ainsi (B_k) est bornée.
On en déduit alors de Bolzano-Weierstrass que (B_k) admet une valeur d'adhérence. Montrons que ce n'est que B. Soit $\tilde{B}$ une autre valeur d'adhérence de (B_k). Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé, on a que $\tilde{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et donc que $\exp(B) = \exp(\tilde{B})$ par continuité de exp et par unicité de la limite. Par injectivité, on a $B = \tilde{B}$. Comme la suite (B_k) est bornée en norme par le sup de ses rayons spectrale, elle est dans un compact et alors on en déduit que la suite (B_k) converge vers B et donc $\exp^{-1}$ est continue.